Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
14 Ιουνίου 2013

Θέμα 1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνεχής.

(α΄) Δείξτε ότι $\bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές.

(β΄) Όταν $m = 1$, τι παραπάνω μπορείτε να πείτε για την $\bar{f}$ (που δεν έχει νόημα όταν $m > 1$);

(γ΄) Εξετάστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(xy, \dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0) & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ως προς τη συνέχειά της.

Θέμα 2. Έστω $f(\bar{x}) = \bar{x}^T Q \bar{x}$, $\bar{x}^T = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο διαγώνιος πίνακας

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}, \quad q_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(α΄) Υπολογίστε την παράγωγο και τον εσσιανό πίνακα της f.

(β΄) Δώστε συνθήκες για τα $q_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, έτσι ώστε η f να έχει στο σημείο $\bar{x} = \bar{0}$: (i) γνήσιο τοπικό μέγιστο, (ii) γνήσιο τοπικό ελάχιστο, και (iii) τίποτα από τα δύο.

(γ΄) Υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor βαθμού k της f στο σημείο $\bar{x} = \bar{0}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$.

(δ΄) Έστω $n = 2$ και $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο επί του γραφήματος Γ_f της f σε κάθε σημείο της καμπύλης $(\gamma(t), (f \circ \gamma)(t)) \in \Gamma_f$, $t \in \mathbb{R}$, καθώς και το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο αυτό. Πώς σχετίζονται το επίπεδο με το διάνυσμα;

(ε΄) Έστω $n = 2$ και $q_1, q_2 > 0$. Δώστε την καμπύλη στάθμης 1 της f και δώστε για κάθε σημείο της καμπύλης αυτής την κατεύθυνση της μεγαλύτερης κλίσης της f. Ποιά είναι η γεωμετρική σχέση της κατεύθυνσης αυτής με την καμπύλη;

(στ΄) Έστω $n = 3$, $q_1 = -1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$. Βρείτε τα σημεία τοπικών ακροτάτων της f υπό τη συνθήκη $\|\bar{x}\| = 1$, όπου $\| \cdot \|$ η ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^3$.

Θέμα 3. Δίνεται ένα δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(α΄) Τι εννοούμε ακριβώς όταν λέμε ότι το $\bar{f}$ είναι "δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμο";

(β΄) Δείξτε ότι ο στροβιλισμός (η περιστροφή) του $\bar{f}$ έχει σε όλο το $\mathbb{R}^3$ απόκλιση μηδέν.

(γ΄) Μπορούμε να το εγγυηθούμε αυτό και όταν το $\bar{f}$ είναι δυο φορές μερικώς διαφορίσιμο; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

Θέμα 4. Δείξτε ότι κοντά στο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(u, v) = (1, 1)$ υπάρχει μοναδική λύση $(u(x, y, z), v(x, y, z))$ του συστήματος

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3,$$
$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

και υπολογίστε την $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1, 1, 1)$.

Λαμβάνονται υπόψη μόνο δικαιολογημένες απαντήσεις!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!